Primo Esercizio

Si scrive l'integrale come $\dfrac{1}{-4}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2iz}-2+e^{-2ix}}{x^2+1}\overset{\text{def}}{=}I_1+I_2+I_3$ e si risolve ciascuno dei tre integrali.

$I_1=-\dfrac{1}{4}2\pi i\lim_{z\to i}\dfrac{e^{2iz}}{z+i}=-\dfrac{1}{4}2\pi i\dfrac{e^{-2}}{2i}$

$I_3=2\pi i\dfrac{1}{4}\lim_{z\to -i}\dfrac{e^{-2iz}}{z-i}=2\pi i\dfrac{1}{4}\dfrac{e^{-2}}{-2i}$

$I_2=\dfrac{1}{2}\pi$

La somma dà $\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-2})$

Secondo integrale

$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1-2a\sin\vartheta+a^2}$. Con il cambio di variabile $e^{i\vartheta}=z$ si ottiene $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{i}\frac{dz}{aiz^2+z(a^2+1)-ai}$ e le radici del denominatore sono: se $|a|>1$ $z_1=\dfrac{i}{a}$, $z_2=ia$; se $|a|<1$ $z_1=ia$ e $z_2=\dfrac{i}{a}$;. Se $|a|=1$ le radici starebbero sulla circonferenza unitaria ovvero il polinomio di secondo grado in ϑ si annullerebbe.

Sia $|a|>1$. Solo $z_1\in\{|z|<1\}$ per cui l'integrale è $I=2\pi i\dfrac{1}{i}\lim_{z\to\frac{i}{a}}\dfrac{1}{ai}\dfrac{1}{(z-ia)}=\dfrac{2\pi 1}{a^2-1}$.

Sia $|a|<1$. Solo $z_1\in\{|z|<1\}$ per cui l'integrale è $I=2\pi i\dfrac{1}{i}\lim_{z\to ia}\dfrac{1}{ai}\dfrac{1}{(z-\frac{1}{a})}=\dfrac{2\pi}{1-a^2}$.

Secondo Esercizio

1) Si consideri la funzione

$$\frac{z}{(z-a)(z-b)}=\frac{z}{(z-z_o+z_o-a)(z-z_o+z_o-b)}=\frac{z}{(z_o-a)(1+\frac{z-z_o}{z_o-a})(z_o-b)(1+\frac{z-z_o}{z_o-b})}=$$

$$=\frac{z}{(z_o-a)(z_o-b)}\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z-z_o)^k}{(z_o-a)^k}\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{(z-z_o)^q}{(z_o-b)^q}=$$

$$=\frac{z}{(z_o-a)(z_o-b)}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^n\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}}=\frac{1}{(z_o-a)(z_o-b)}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_o)^{n+1}\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}}+$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}z_o(z-z_o)^n\sum_{q=0}^{n}\frac{1}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{n-q}}\Big]\overset{\text{def}}{=}\sum_{j=0}^{+\infty}c_j(z-z_o)^j$$

$$c_j=\frac{1}{(z_o-a)(z_o-b)}\Big[z_o\sum_{q=0}^{j}\frac{(-)^j}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{i-q}}+\sum_{q=0}^{j-1}\frac{(-)^{j-1}}{(z_o-b)^q(z_o-a)^{j-q-1}}\Big]$$

2) $c_3=-\dfrac{16}{(b-a)^4}$

3) Se $z_o=0$ si ha $b_3=\dfrac{3}{(ab)^3}$

4) $f(z)=\dfrac{z}{(z-a)(z-a+a-b)}=\dfrac{z}{z-a}\dfrac{1}{a-b}\dfrac{1}{1+\frac{z-a}{a-b}}=\dfrac{z}{z-a}\dfrac{1}{a-b}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(z-a)^k}{(a-b)^k}=\sum_{j=0}^{+\infty}c_j(z-z_o)^j$ con

$$c_j=\frac{1}{a-b}\Big[\frac{(-)^j}{(a-b)^j}+a\frac{(-)^{j+1}}{(a-b)^{j+1}}\Big]=\frac{(-)^{j+1}b}{(a-b)^{j+2}}$$

Nel caso dello sviluppo di Laurent centrato in $z=b$ si ha $c_j=\dfrac{(-)^{j+1}a}{(b-a)^{j+2}}$

Terzo Esercizio Usando la trasformata di Laplace bisogna risolvere l'integrale $a>1$

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}dpe^{pt}\left(\frac{e^{-p}}{(p-1)^2}-\frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)}+\frac{p-2}{(p-1)^2}\right)$$

$I = \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp} e^{p(t-1)} H(t-1) + \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp} \frac{pe^{pt}}{p^2+1} + \lim_{p \to i} \frac{pe^{pt}}{(p-1)^2(p+i)} + \lim_{p \to -i} \frac{pe^{pt}}{(p-1)^2(p-i)} + \lim_{p \to 1} \frac{d}{dp} e^{pt}(p-2) =$
$(t-1)e^{t-1}H(t-1) + e^t - \frac{1}{2} te^t - \frac{1}{2} \sin t$

Quarto Esercizio Sia $\gamma^{(e)}(t)$ la curva descrivente la porzione di curva giacente sull'ellisse e $\gamma^{(f)}(t)$ la curva descrivente la porzione di curva giacente sull'asse delle y con $-\alpha \leq y \leq \alpha$; m_1 e m_2 le rispettive masse. Siano poi $\delta_1(x,y) = |xy|$ e $\delta_2(x,y) = |y-q|$ con q variabile a seconda del compito. La formula che cerchiamo è
$\frac{1}{m_1+m_2} (\int_{\gamma^{(e)}} dt \cdot \gamma_2^{(e)} \cdot \delta(\gamma_1^{(e)}, \gamma_2^{(e)}) \cdot \|(\gamma^{(e)})'\| + \int_{\gamma^{(f)}} dt \cdot \gamma_2^{(f)} \cdot \delta(\gamma_1^{(f)}, \gamma_2^{(f)}) \cdot \|(\gamma^{(f)})'\|)$

$m_1 = \int_{\gamma^{(e)}} dt \delta(\gamma_1^{(e)}, \gamma_2^{(e)}) \|(\gamma^{(e)})'\| = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta ab |\cos\vartheta \sin\vartheta| \sqrt{a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta} =$
$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta ab \cos\vartheta \sin\vartheta \sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\cos^2\vartheta} = \frac{2}{3} \frac{ab}{a+b} (a^2+ab+b^2),$
$m_2 = q^2 + \alpha^2$
Nella formula che cerchiamo il primo contributo è nullo in quanto si integra una funzione dispari su un intervallo simmetrico. $\int_{\gamma^{(f)}} dt \cdot \gamma_2^{(f)} \cdot \delta(\gamma_1^{(f)}, \gamma_2^{(f)}) \cdot \|(\gamma^{(f)})'\| = -q\alpha^2$

La formula finale è $\frac{-q\alpha^2}{m_1+m_2}$

Quinto Esercizio Sia $z = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ il paraboloide e sia $S = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, z = 0\}$ e sia $V = \{z \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, z \geq 0\}$. Sia inoltre $\underline{F}(\underline{x}) = a(\underline{x})\underline{i} + b(\underline{x})\underline{j} + \underline{k}$, il campo vettoriale dove a e b sono tali che $div\underline{F}(\underline{x}) = y^2 + x$. Usando il teorema della divergenza il risultato è $\int\int\int_V dxdydz(div\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x}))$ dove $\underline{n}_e(\underline{x}) = (0,0,-1)$. Facendo i conti si ha $\int\int\int_V dxdydz(div\underline{F}(\underline{x})) = \int\int\int_V dxdydz(y^2+x) = \int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1} dxdy \int_0^{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} dz(y^2+x)$. Passando a coordinate polari ellittiche sul piano si ottiene $\pi\frac{ab}{2} - \frac{\pi}{24} \frac{a^2+3b^2}{ab}$ mentre $\int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x})) = 0$. Si poteva anche calcolare direttamente il flusso ma le formule sono alquanto più lunghe.

Sesto Esercizio
La forma differenziale poteva scvriversi come $\omega_1 + \omega_2$ dove $\omega_1 = a\frac{x}{x^2+y^2}dx + a\frac{y}{x^2+y^2}dy$ e $\omega_2 = b\frac{-y}{x^2+y^2}dx + b\frac{x}{x^2+y^2}dy$. Sono entrambe chiuse ma la prima è esatta e la seconda no. Infatti la prima ammette il potenziale $a\ln(x^2+y^2)$ mentre la seconda no. $\int_{\gamma_i} \omega_1 = 0$ per $i = 1,,2,3$. $\int_{\gamma_1} \omega_2 = 2\pi$ (si calcola). $\int_{\gamma_2} \omega_2 = 2\pi$ in quanto la forma è chiusa e la seconda curva circonda l'origine. $\int_{\gamma_3} \omega_2 = 0$ in quanto la curva giace, insieme con la sua parte interna, in un sottoinsieme semplicemente connesso del dominio di ω_2 (non circonda l'origine).